1　2023 年合同教育全道研究集会　4. 数学教育分科会報告　　成田　収

2023 年 11 月 4 日（土）合同教育研究集会数学教育分科会が開かれた。分科会には 10 名が参加した。レポートは 4 本であった。

分科会は、対面＋オンラインのハイブリッド型集会で行われた。
レポートは、バカロレア 2023 年問題をみる、替え歌で覚える数学公式の授業、カントルの定理について、幾何学の公理化と循環論法、の 4 本のレポートが報告され検討された。

一つ一つのテーマについて面白く議論することができた。
参加者は 10 名で、　参加者中現役教員は 1 名のみであり、ほとんどが退職教員であった。現役の教員が授業展開するにあたって、基本的なことを研修しておくことが大切であるということが忘れ去られているのではないかという危惧を抱かせる状況が垣間見えた。

全体会では、2022 年度の小中学校における不登校の児童生徒数が 29 万 9048 人に上り、前年度より 22 ％も増加しており、高校でも、不登校生徒数は 60,575 人で前年度からみて 18 ％増加していることが報告された。

また、教員の時間外労働が過労死ラインを超え、未配置教員数が前年度の倍になっている。

また、教育現場は、以前から、問題であった授業のスタンダード化に加え、コロナ下に急速に進んだ GIGA スクール構想による一人一台端末などに振り回され、さらに、評価業務の複雑化などにより、教師の仕事は事務化し、教育は評価の高い人材を育てることと勘違いしてしまいそうな情勢である。教育は教科教育を中心として、学ぶことの楽しさに気づき、人として成長することを支援する活動からどんどん乖離していっている。

このことが、合同教研という豊かな教育のための実践研究の交流のための集会に教員が集結できないという実態を生んでいるのではないかと危惧する。

レポートの内容に少し触れる。

1.1　替え歌で覚える数学公式の授業　氏家 英夫

高校数学で必ず通過する難関である、2 次方程式の解の公式、2 次関数の平方完成、余弦定理、三角関数の加法定理などの公式を替え歌で覚えてしまおうという実践の報告である。

レポートは次のように報告された。

替え歌で覚えさせるなんて最低のやり方という批判もあるかもしれない。数学嫌いの高校でやってきて、生徒の様子を観察していると後半 10 年間くらい生徒の学力様子がすごく変化していると感じる。昔できない生徒って、なんかコミュニケーションができなくて暗い感じの生徒が多かったが、最近は明るくて普通にコミュニケーションができるのに、全然、割り算ができなかったりする。低学力の底が抜けたような感じがする。一回どこかで何かできなくなったら、そのまま手がつけられなくて高校まできているという感じがする。そういう状況の中で、わかる数学、楽しい数学の授業を作っていくことはなかなか厳しいものがある。普段の授業で、覚えなくてはならない、難しいっていうことがあるときに、こうして歌で覚えると、生徒と仲良くなって、わかるという風に思ってくれるようになるために助けになった。

岩村繁夫氏 (元公立小学校教員) がかつて次のように述べていたという。

> 今ほど算数の授業の質が低下している時代はかつてなかったと感じています。その第一の原因は先生たちがあまりにも忙しく授業の準備をする時間がとれないことにあります。テストの採点・集計、評価基準の作成、授業改善プランの作成・修正・・・2 つ目の原因、それは“足並みを揃える”ところにあります。進度を揃え、教材を揃え、授業展開を揃え・・・足並みを揃えることを優先すると、子どもがつまずいたり理解できなかったときに、時間をかけて指導することができなくなります。(『数学教室』2015 年 1 月)

レポート検討の中では次のような議論があった。

1. 生徒から「これを覚える替え歌はないの？」という言葉が出てくるところが、生徒とのコミュニケーションがうまく取れていることがわかる。これに先生が応えているっていうところが、それだけで救われる。
2. 算数って、そんなにいろいろなことを覚えさせて、テストして採点しなければならないんだろうかと思う。それだから嫌いになるんじゃないかっていう気がする。今小学校は、ものすごく細かくテストやっていて、こりゃ嫌いになるよなと思う。嫌いにさえならなければ、大人になって、これどうことだろうと思った時に自分で学べるのではないかと思うのだが。
3. 去年から今年にかけて、不登校が 22 %増えている。コロナ禍ということもあるかもしれないけれど、今の教育の質がとことん変わってきてしまったことも原因ではないか。GIGA スクールで先生方がものすごく忙しくなっている、やらなければいけないことがびっしりで、子供にかまっている暇が無い。ただ、テストだけしてればいいという状態。今の状態は、教育で一番大切な、「学んで楽しい」ということが壊れていく段階にきているのではないか。勉強できるかどうか、社会人になった時にはあまり意味がない、それよりも、学んだことが楽しかったという記憶、算数面白かったなという気持ちが大切。これが学校の中で大事にされない、逆転している、これが今の教育の病理だと思う。何のために教育しているかというのが逆転している。人材教育のための教育となっている。人としての喜びのための教育になっていない。
4. 文科省は指導方法や指導内容については民間教育団体に太刀打ちできないから、何に力を入れて都道府県に下したかというと評価である。学校に下りてきたのは評価だけである。内容ではない、指導方法でもない。
5. 高校にも 2022 年から観点別評価が入ってきた。試験も、問題別に何を評価するかを書くようになった。高校教育も同じように壊されていくのではないか。
6. 高校の先生方は真面目だから、一生懸命観、難しい方法に取り組んで、観点別評価を実施している。評価による締め付けは、どんな科学的知見に基づいてやっているのか、そのような科学的知見はないと思われる。
7. 平方完成、加法定理を歌で覚えるのもいいが、公式を覚えない方法を考える、あるいは、公式がどのようにしてできてきたのかを学ぶということはどうなのか。アメリカの大学では、テストの問題用紙に使用する公式はみんな書いてあるという。そういうやり方もあるのではないか。
8. 平方完成を面積図で教えるということは使わなかったのかな。私の高校では、面積図でやっている。これはすごい武器だ。これでやると、ほとんどの生徒が「わかった」という感想を持って喜ぶ。因数分解にも通用する。そうすると、評価など気にせず、じっくり学ぶことができる学びの空間が出来上がる。このようにすれば、不登校も作らなくて済むのではないか。どれだけ、1 時間 1 時間の授業を、目の前にいる生徒と楽しい、授業受けてよかったなと思える授業にするかというところが勝負だと思う。その中で、最後を歌で締め括ってみるというようなことが起これば、すごく明るくていいなと思う。
9. 計算ができるだけでなくて、いろんな考え方ができることがこれからの教育には必要だと考える。中学生で割り算ができなければ、九々表を配るとか電卓を使うとか、それでも解ければこれからの時代は何も問題ではない。大人になったときに、覚えてなくても、そういう問題は解けるよ、ということを伝えていくことはできないものだろうか。

1.2 バカロレア 2023 年問題をみる　渡邊 勝

フランスの高校卒業試験兼大学入学資格試験にあたるバカロレアの数学の問題についての検討が報告された。フランスでは最近バカロレア改革が進められ、合格率が 90 %に達しているという。問題は確かに易しくなっているが、その内容は自然対数の微分を含む大変高度なものである。にもかかわらず基本的なことが問われている良問が多い。また、マークシート方式ではなく記述方式である。日本も見習うべきかもしれない。

1. バカロレアとは

バカロレアとは，フランスの高校の修了認定資格であると同時に，大学入学資格等各種国家試験の出願が認められる資格試験である。

バカロレアには普通バカロレア，技術バカロレア，職業バカロレアの 3 種類がある。2023 年のバカロレア受験者 739,501 人の内訳は，普通バカロレアが 387,067 人（52.3 %），技術バカロレアが 148,466 人（20.1 %），職業バカロレアが 203,968 人（27.6 %）である。
そのうち合格者は、普通バカロレアが 370,395 人（95.7 %）、技術バカロレアが 133,275 人（89.8 %）、職業バカロレアが 168,698 人（82.7）%、全体で 672,368 人（90.9 %）である。
このうち普通バカロレアがほぼ大学入学資格試験にあたる。

フランスでは、これらの、修了認定試験の合格者の割合が、2000 年頃には 80 %程度で 20 %が卒業認定されない状態であったことや、普通バカロレアの中の科学系＞経済系＞文学系の序列化による弊害などから、バカロレアの改革が行われてきた。改革の結果、普通バカロレアの 1 本化、合格率の改善が見られた。改革は 2020 年から実施されたが、COVID-19 の影響でバカロレア試験が中止され本格的実施は 2022 年からになる。

バカロレア改革の現状と課題　阿部和久，倉元直樹 (東北大学) によると、そのうち、数学を受験している人数は、253,224 人（2019 年）くらいと思われる。

次に、レポートの内容から一部抜粋して紹介する。
A. 問題の特徴

第一問は、大企業の工場にある同一の機械点検を題材に確率の知識、技能を問う問題である。仏国リセ (日本の高校に相当) における確率学習の基本は、根元事象の確率を所与として、それから条件付き確率、余事象の確率、二項分布則などを求めていくことであって、日本のように「数え上げに」接続して、ラプラス流で事象の確率を求めることはない。

第二問は、実関数の挙動を追うための知識、技能を見る問題である。今年度は対数関数を題材にしている。昨年度は指数関数の挙動を見る問題があった。

第三問は、企業が公開しているサイトで「よくある質問」の数を二つのモデルで推測する問題である。数列の収束問題である。いかにも「数理科学的」問題意識による数学観から出発しているように見える。この点日本では、この観点が乏しい。

第四問は、空間図形中の平面の方程式、面積、四面体の体積をヴェクトルを使って求める問題である。基本的知識、技法を見るようになっていて、「ひねって」はいない。この特徴はバカロレアの伝統であるかもしれない。
B. 解答の仕方
・4 問を 4 時間で解くので、あまり焦らずに解けそうである。ひょっとして突飛なアイデアの解法がでる期待さえ抱かせる。
・かつては殆どが証明問題であったが、改革後は、正解選択問題が必ずあり、求値問題も増えている。
・コンピュータの使用が許されている。簡単なプログラムが組めるタイプのものであろう。日本では工業高校で必須の用具になっていた小型のものと同じだと思われる。(現在は多分ノート型パソコンになっているかもしれない)
・正解選択問題でも〇を付けたりマーカー塗りつぶしをしたりせず問題番号と正解番号を書かせている。

1.3　カントルの定理について　真鍋 和弘

内容を簡単に紹介する。

ある集合 A の部分集合全体の集合を $P(A)$ とあらわす。
$A=\{1,2\}$ であれば、空集合を $\varnothing$ と表すとき、$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ である。この $P(A)$ を A のべき集合という。

A の要素の個数を $|A|$ で表すと、この場合、$|A| = 2$ で $|P(A)| = 4$ であるから、

$$|A| < |P(A)|$$

が成り立っている。つまり、A の要素の個数より、A のベキ集合 $P(A)$ の要素の個数の方が大きい。

カントルの定理というのは、A が無限集合のときもこのことが成立するというものだ。
すると、この単純な真理から、集合論のパラドックスが生じる。このパラドックスを人類はいかにして克服したのかを含め、高校生とともに楽しみながら鑑賞したいものだというのが本レポートの提起である。

1.3.1 集合の濃度と単射、全射

無限集合の場合個数の大きさを有限集合のように単純に考えることはできないが、集合 A, B について、写像 f で

$$f : A \longrightarrow B \text{ が中への } 1:1 \text{ 写像となるものがあるとき、}$$

B の濃度は A の濃度以上であるといい、濃度という言葉を無限集合の場合、有限集合の個数の概念を拡張したものと考えることとする。これは、自然なことだろう。記号で

$$|A| \leqq |B|$$

とあらわす。

f が、B の全ての要素 b に対してある $a \in A$ があって、$f(a) = b$ となるとき、f を全射といって、このような

$$\text{全射} \quad f : A \longrightarrow B \quad \text{が存在するとき、}$$

$$|A| \geqq |B|$$

である。

f が単射かつ全射であるとき、全単射といい、

$$\text{全単射} \quad f : A \longrightarrow B \quad \text{が存在するとき、}$$

A の濃度と B の濃度は等しいと考え、

$$|A| = |B|$$

とあらわす。このときは、A の要素全てと、B の要素全ての間に $1:1$ の対応があるということを意味する。

すると上の例のように A が有限集合で、$A = \{1, 2\}$,$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ であるとき、
写像 $f : A \longrightarrow P(A)$ で A の要素 $a \ \ (a = 1, 2)$ に $P(A)$ の要素 $\{a\}$ を対応させれば、これは単射となり、

$$|A| \leqq |P(A)|$$

がわかる。また、$\varnothing$ や $\{1, 2\}$ に対応する A の要素がないため、

$$|A| = |P(A)| \text{ は否定される。}$$

したがって、

$$|A| < |P(A)|$$

がいえる。これと同じことが、無限集合のときも言える。

定理 1 (カントルの定理)**.**

$$|A| < |P(A)|$$

つまり、任意の集合 A について、そのべき集合 $P(A)$ を考えると
A の濃度より、$P(A)$ の濃度の方が真に大きい

レポートでは、有限集合の場合、可算無限集合の場合、非可算無限集合の場合、についてそれぞれ工夫を凝らした証明が紹介されている。

その、非加算集合の場合の一般的な証明が美しい。

次のようなものである。

1.3.2　カントルの定理の証明

$a \in A$ から $\{a\} \in P(A)$ への対応は単射である。よって、

$$|A| \leqq |P(A)|$$

である。

A から $P(A)$ への全射 f が存在したとして矛盾を導く。

集合 B を

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

により定義すると、B は A の部分集合、すなわち $B \in P(A)$ である。ここで f は全射だから、$B = f(c)$ となる $c \in A$ が必ず存在する。

$c \in B$ とすると、B の定義より $c \notin f(c) = B$ である。

今度は $c \notin B$ とすると、B の定義より $c \in f(c) = B$ となる。

いずれにしても

$$c \in B \Longleftrightarrow c \notin B$$

となるので矛盾である。したがって A から $P(A)$ への全射はない。すなわち次がなりたつ。

$$|A| < |P(A)|.$$

つまり、カントルの定理が示されたことになる。

このカントルの定理を認めると、全ての集合の集合を考えると矛盾が起こることが次のようにしてわかる。

1.3.3　カントルのパラドクス

すべての集合の全体を V とする。論理式を使えば次のようにも書ける。

$$V = \{x \mid x = x\}.$$

もし V が集合なら $P(V)$ も集合である。よって $P(V) \subseteq V$ である。したがって

$$|P(V)| \leqq |V|$$

である。一方でカントルの定理から、

$$|V| < |P(V)|$$

である。 これから

$$|V| < |P(V)| \leqq |V|$$

がでるが、これは矛盾。 ■

この矛盾を回避するために、ツェルメロ (Zermelo) は分出公理を付け加えた。しかし、これでは、自由に数学することができないことから、フレンケル (Fraenkel) とスコーレム (Skolem) は置換公理を付け加え数学の自由を回復させた。いま公理的集合論の中心は ZF あるいは ZFC と呼ばれている。Z は Zermelo,F は Fraenkel で C は選択公理 Axiom of choice の C であるが、ZF は ZFS と呼ぶべきものである。

1.4　幾何学の公理化と循環論法　成田 收

ユークリッドの原論をもとにした幾何教育の中では、二等辺三角形の底角が等しいことは基本的な命題である。

このことは、この命題が、ユークリッドの原論で冒頭の第 1 巻の極最初の第 5 命題に現れることからもわかる。第 1 命題は正三角形を作図することで、第 2 命題はある長さの線分を任意の 1 点から引くことができることを示すものであり、第 3 命題は長い線分から短い線分を切り出すもので、第 4 命題が二辺夾角の合同条件であるから、この第 5 命題が如何に基本的なものかがわかる。

この証明を行う際に、原論は、それまでに証明されたことのみを使って証明するという姿勢を貫いている。それは、循環論法を避けるためである。

ところで、二等辺三角形の底角が等しいことの証明法はいろいろと考えられており、中学校の教科書で採用されているのは、頂点から底辺へ頂角の 2 等分線を引き、そこに出現する細分された二つの三角形について、二辺夾角が等しいことから合同であることを証明し、合同な三角形の対応する角が等しいことから、元の二等辺三角形の底角が等しいことを証明するものである。

ところが原論はこの証明を採用していない。

その理由は、次のことによる。

角の二等分線を引く作図法によって、なぜ、角の二等分線を引くことができるのかを証明するためには、二等辺三角形の底角が等しいことを使わなくてはならないからなのだ。

これでは二等辺三角形の底角が等しいことを証明するために、二等辺三角形の底角が等しいことを使っていることとなり、循環論法に陥ってしまう。

他にも、二等辺三角形の頂点から、底辺の中点に向かって中線を引き、3 辺相等の合同定理を使う方法、二等辺三角形の頂点から、底辺へ垂線を下ろし、二つの直角三角形の 2 辺が等しいとき、合同であることを使う方法も考えられるが、3 辺相等の合同定理も、直角三角形の 2 辺相等による合同定理もその証明方法によっては、2 等辺三角形の底角が等しいことを使って証明される。

したがって、循環論法と考えられる。

しかし、これらの議論は、ユークリッドの原論を原典として考えたときの議論である。ユークリッドの原論は、非ユークリッド幾何学が現れたときから、唯一の幾何学ではなくなっている。また、ヒルベルトがその著書「幾何学の基礎」で述べたように、ユークリッドの原論は、完全な公理体系になっていない。それを完全な公理体系にしたのが「幾何学の基礎」である。これを契機に、全ての数学は、有限の公理群と論理のみで全ての数学的に正しいことは証明できるのではないかと考えたのが、ヒルベルトの「有限の立場」と考えられる。現代では、公理主義といわれている。

ところが、ゲーデルが出現し、完全性定理、不完全性定理を発表し、ヒルベルトの有限の立場はほぼ否定された形である。

この辺りを研究した書籍が、足立恒雄氏の「よみがえる非ユークリッド幾何」日本評論社　2019 年　である。

ユークリッドの原論の第 28 命題までは平行線公準（第 5 公準）を利用せずに証明される幾何学である。ここまでは、ゲーデルの完全性定理が成立する 1 階の述語論理で証明することができる。これを、タルスキー学派が研究している。絶対幾何学という。この成果をもとに、新しく構成した、足立恒雄式公理体系でみると、3 辺相等によって三角形が合同となることは、公理に採用されている。つまり、3 辺相等による合同定理を使う、2 等辺三角形の頂点から中線を引く方法により底角が等しいことを証明する方法は、循環論法ではなく、最も正当な証明ということになる。

幾何学は、1800 年代にボヤイ、ロバチェフスキー、による非ユークリッド幾何学が生まれ、1900 年にヒルベルトによる公理系の再編が行われ、1930 年にゲーデルの定理が生まれ、その様相を一変している。1850 年代のリーマン幾何学の誕生、1870 年代のクラインによるエルランゲンプログラムが宣言されていることを考えると、いつまでも、ユークリッドの原論の時代ではないかもしれない。

新しい、幾何学教育を展望するときが来ているのではないかと感じる。